

**В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНОЙ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ  $L_1$ \***

Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация,  
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Рассматривается движение небесного тела в рамках ограниченной задачи трех тел системы Солнце—Земля. Исследуются уравнения управляемого поступательно-вращательного движения небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$ . Для описания поступательного движения небесного тела используются уравнения хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел системы Солнце—Земля, а для вращательного — динамические уравнения Эйлера и кватернионное кинематическое уравнение. Изучается устойчивость движения в окрестности положений относительного равновесия небесного тела, стабилизация вращательного движения небесного тела с предложенными законами управления. Для решения задач стабилизации строится функция Ляпунова в виде суммы кинетической энергии небесного тела и специальной «кинематической» функции параметров Родрига—Гамильтона. Проводится численное моделирование управляемого вращательного движения небесного тела в точке либрации  $L_1$ , приводятся численные характеристики параметров управления и вращательного движения небесного тела. Результаты численных экспериментов представлены графически. Библиогр. 14 назв. Ил. 10.

*Ключевые слова:* ограниченная задача трех тел, твердое тело, точка либрации, поступательно-вращательное движение, управление, стабилизация.

*D. V. Shymanchuk*

**MODELING OF CONTROLLED COUPLED  
ATTITUDE-ORBIT MOTION IN THE NEIGHBORHOOD  
OF COLLINEAR LIBRATION POINT  $L_1$** 

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg,  
199034, Russian Federation

This paper considers the motion of a celestial body (as a rigid body) within the restricted three-body problem of the Sun—Earth system. The equations of controlled coupled attitude-orbit motion in the neighborhood of collinear libration point  $L_1$  are investigated. The translational orbital motion of a celestial body is described using Hill's equations of a circular restricted three-body problem of the Sun—Earth system. Rotational orbital motion is described using Euler's dynamic equations and quaternion kinematic equation. As an important result, we investigate the problems of celestial body motion stability in relative equilibrium positions and stabilization of a celestial body motion with proposed control laws in collinear libration point  $L_1$ . To study stabilization problems, Lyapunov function is constructed in the form of the sum of the kinetic energy of a celestial body and special "kinematics" function of the Rodriguez—Hamiltonian parameters. The numerical modeling of the controlled rotational motion of a celestial body at libration point  $L_1$  is carried out. The numerical characteristics of the control parameters and rotational motion of the celestial body are given. Results of numerical integration are presented graphically. Refs 14. Figs 10.

---

*Шиманчук Дмитрий Викторович* — кандидат физико-математических наук, доцент;  
[d.shimanchuk@spbu.ru](mailto:d.shimanchuk@spbu.ru)

*Shymanchuk Dmitry Viktorovich* — PhD of physical and mathematical science, associate professor;  
[d.shimanchuk@spbu.ru](mailto:d.shimanchuk@spbu.ru)

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Санкт-Петербургского государственного университета (грант № 9.37.345.2015).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2017

*Keywords:* restricted three body problem, Hill's problem, libration point, rigid body, coupled attitude-orbit motion, control, stabilization.

**Введение.** Прикладные задачи, связанные с освоением и изучением космического пространства, движения искусственных и естественных небесных тел, требуют, помимо фундаментального исследования поступательного движения, анализа вращательного движения небесных тел относительно их центра масс. Например, исследование излучения звезд возможно при наличии освещения установленных на космическом аппарате измерительных приборов, которое обусловлено вращательным движением небесного тела относительно центра масс. Анализ строения атмосферы планеты зависит от ориентации космического аппарата относительно набегающего потока частиц. Движение около центра масс непосредственно влияет на аэродинамические свойства небесного тела и, следовательно, на его траекторию и время существования.

Вместе с тем задачи определения движения небесного тела относительно центра масс связаны с возможностью получения пассивной ориентации, обусловленной влиянием моментов внешних сил. Эти задачи предполагают нахождение естественных ориентированных положений небесного тела, анализ их устойчивости и изучение движения в их окрестности. Для решения задачи о вращательном движении небесных тел требуются установление формы и распределения масс объекта исследования, выбор начальных данных, определение гравитационных, аэродинамических, электромагнитных моментов, диссипативных эффектов различной природы и т. д.

В рамках задачи двух тел было выявлено, что, если кинетическая энергия вращения небесного тела достаточно мала по сравнению с работой внешних сил, то движение тела при надлежащей начальной ориентации будет носить либрационный характер (тело будет совершать колебательное движение около некоторого устойчивого положения относительного равновесия). Влияние таких положений равновесия и исследование движения в их окрестности представляют особый интерес для задачи стабилизации и ориентации небесных тел с помощью моментов внешних сил [1, 2].

При совместном рассмотрении поступательного и вращательного управляемого орбитального движений небесного тела, учитывая различные факторы внешнего воздействия, вращательное движение относительно центра масс, с одной стороны, существенно зависит от положения центра масс в фазовом пространстве, с другой — может оказывать влияние на поступательное движение. Например, управляя ориентацией солнечного паруса — изменяя результирующий вращательный момент, можно менять силу светового давления, действующую на парус, и тем самым способствовать наиболее эффективному решению задачи удержания небесного тела в окрестности точки либрации и/или задачи маневрирования в околоземном космическом пространстве.

Рассмотрим орбитальное движение небесного тела массы  $m$  в гравитационном поле двух массивных тел — Земли массы  $M_1$  и Солнца массы  $M_2$  ( $m \ll M_1 < M_2$ ). Такое движение может быть описано моделью ограниченной задачи трех тел, а при пренебрежении эксцентриситетом орбиты Земли — моделью круговой ограниченной задачи трех тел. В рамках последней модели исследуется движение тела малой массы  $m$  под действием гравитационных полей притяжения двух массивных тел  $M_1$  и  $M_2$ , обращающихся по круговым орбитам вокруг их общего центра инерции. Массивные тела описываются как материальные точки. Также считается, что тело малой массы  $m$  не влияет на движение притягивающих центров  $M_1$  и  $M_2$ . Следовательно, движение центров  $M_1$  и  $M_2$  подчиняется задаче двух тел, для которой выполняется частный случай третьего закона Кеплера

$$\omega^2 R^3 = \gamma(M_1 + M_2),$$

где  $\omega$  — величина угловой скорости вращения радиус-вектора центра масс Земли по орбите;  $R$  — расстояние между  $M_1$  и  $M_2$  (а. е.);  $\gamma$  — гравитационная постоянная.

Известно, что уравнения ограниченной задачи трех тел имеют пять стационарных решений, которые в небесной механике называют точками либрации, или точками Лагранжа (рис. 1). Три из них —  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  — коллинеарные точки либрации, являющиеся неустойчивыми положениями равновесия во вращающейся системе координат, треугольные точки либрации  $L_4$  и  $L_5$  устойчивы при определенном отношении масс притягивающих центров, в линейном приближении условие устойчивости может быть записано в виде [3]

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} < \frac{9 - \sqrt{69}}{18} \approx 0.0385208.$$

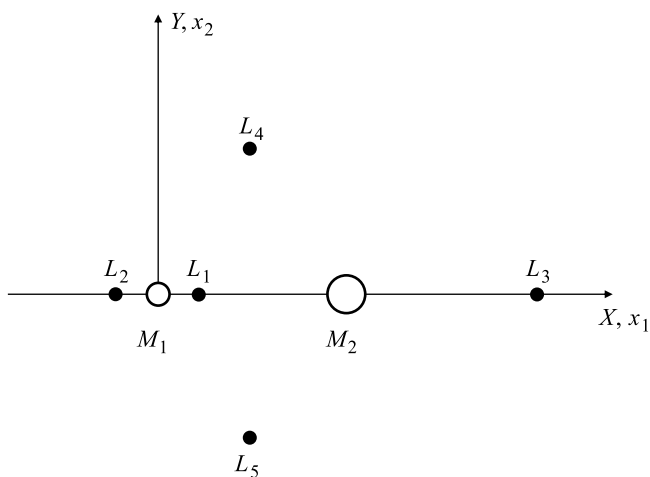


Рис. 1. Точки либрации

Точки либрации — модельные понятия круговой ограниченной задачи трех тел, однако их свойства определяют качественный характер движения небесного тела малой массы, который в реальности происходит под действием многих возмущающих факторов.

Современное развитие космонавтики с недавнего времени позволяет реализовывать проекты, связанные с использованием окрестностей коллинеарных точек либрации  $L_1$  и  $L_2$ , и с учетом их свойств становится очевидной актуальность задачи удержания небесного тела в окрестности этих точек [4, 5]. Неустойчивость коллинеарных точек либрации может быть и положительным фактором, способствующим космическому маневрированию с относительно небольшими энергетическими затратами [6, 7].

Отметим, что в работе [8] было изучено неуправляемое вращательное движение симметричного небесного тела относительно его центра масс в предположении, что центр масс совпадает с  $L_2$  в фазовом пространстве, в [9] были представлены вычислительные методы расчета периодического вращательного движения спутника, когда его центр масс находится на плоской орбите Ляпунова.

Для исследования движения небесного тела введем следующие системы координат (рис. 2):  $O_{XYZ}$  — звездная (барицентрическая) система координат с началом

в центре масс Земли и Солнца;  $O_{\overline{XY}}$  — плоскость, в которой лежат орбиты Земли и Солнца;  $M_{1XYZ}$  — вращающаяся (геоцентрическая) система координат;  $C_{XYZ}$  — кенигова система координат с началом в центре масс тела и осями, параллельными осям вращающейся системы координат;  $C_{xyz}$  — система координат, жестко связанная с телом и началом в центре масс тела, оси которой направлены по главным центральным осям инерции тела.

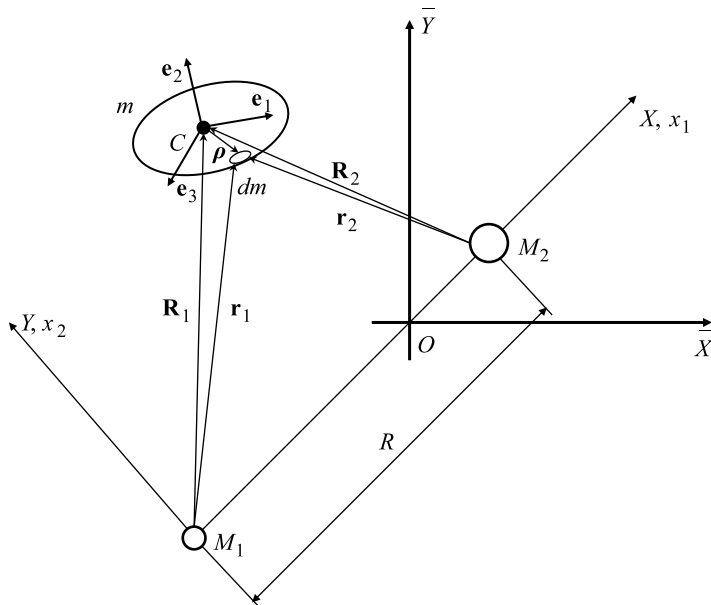


Рис. 2. Введенные системы координат

**Главный вектор и главный момент сил тяготения.** Для нахождения дифференциальных уравнений движения небесного тела необходимо определить главный вектор сил тяготения и их гравитационный момент относительно центра масс тела  $C$ .

Сила, с которой массивные тела действуют на элемент массы  $dm$  тела, определяется по формуле [10]

$$d\mathbf{F} = -\gamma \frac{M_1 dm}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - \gamma \frac{M_2 dm}{r_2^3} \mathbf{r}_2, \quad (1)$$

в которой  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) — соответственно радиус-векторы элемента массы  $dm$  небесного тела относительно Земли и Солнца,  $r_i$  ( $i = 1, 2$ ) — длины этих радиус-векторов.

Для получения главного вектора сил притяжения необходимо проинтегрировать выражение (1) по всему объему тела. Будем предполагать, что линейные размеры тела много меньше расстояний до притягивающих центров.

Пусть  $\rho$  — радиус-вектор элемента массы  $dm$ , компоненты которого в системе координат  $C_{XYZ}$  есть  $X_\rho$ ,  $Y_\rho$ ,  $Z_\rho$ , величина  $\rho$  — его длина. Тогда для  $\mathbf{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) можно записать

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i + \rho, \quad r_i = R_i \sqrt{1 + \frac{2(\mathbf{R}_i, \rho)}{R_i^2} + \left(\frac{\rho}{R_i}\right)^2}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{R}_i$  ( $i = 1, 2$ ) — соответственно радиус-векторы центра масс небесного тела относительно Земли и Солнца;  $R_i$  ( $i = 1, 2$ ) — длины этих радиус-векторов;  $(\cdot, \cdot)$  — операция скалярного произведения.

Пренебрегая величинами  $\left(\frac{\rho}{R_i}\right)^2$  ( $i = 1, 2$ ) и выше, из (2) можно получить разложение Тейлора в виде

$$\frac{1}{r_i^3} = \frac{1}{R_i^3} \left(1 - \frac{3(\mathbf{R}_i, \boldsymbol{\rho})}{R_i^2}\right), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Произведем интегрирование по всему объему тела, используя выражения (1)–(3) и учитывая то, что центр масс тела находится в начале кениговой системы координат:

$$\int X_\rho dm = \int Y_\rho dm = \int Z_\rho dm = 0.$$

Тогда находим, что с точностью до  $\left(\frac{\rho}{R_i}\right)^2$  ( $i = 1, 2$ ) главный вектор сил тяготения задается формулой

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{M_1 m}{R_1^3} \mathbf{R}_1 - \gamma \frac{M_2 m}{R_2^3} \mathbf{R}_2. \quad (4)$$

Таким образом, получаем, что, если пренебречь величинами порядка  $\left(\frac{\rho}{R_i}\right)^2$  ( $i = 1, 2$ ) и выше, то размеры тела не влияют на значение и направление главного вектора сил тяготения, следовательно, вращательное движение небесного тела относительно центра масс не влияет на поступательное, т. е. центр масс движется как материальная точка массы  $m$  под действием притягивающих центров  $M_1$  и  $M_2$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Если  $\rho \approx 15$  м, а небесное тело находится в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$ :  $R_1$  — порядка миллиона километров,  $R_2$  — сотни миллионов километров, тогда отбрасываемые величины

$$\frac{\rho}{R_1} \approx 10^{-8}, \quad \frac{\rho}{R_2} \approx 10^{-10}.$$

Определим гравитационный момент сил тяготения. Возьмем систему координат  $C_{xyz}$ . Ориентацию небесного тела относительно системы координат  $C_{XYZ}$  будем находить при помощи параметров Родрига—Гамильтона  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  по соотношению

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1, \quad (5)$$

где три параметра  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) пропорциональны проекциям вектора конечного поворота, параметр  $\lambda_0$  выбирается из условия нормировки (5).

Известно [11, 12], что через параметры Родрига—Гамильтона однозначно можно определить матрицу направляющих косинусов базисных векторов  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) системы координат, жестко связанной с телом, относительно базиса  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) кениговой системы координат:

$$\begin{matrix} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) \\ 2(\lambda_0 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_2) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_2^2) - 1 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) & 2(\lambda_0^2 + \lambda_3^2) - 1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (6)$$

Обратно, если задана матрица направляющих косинусов (6), то параметры Родрига–Гамильтона могут быть восстановлены с точностью до знака, т. е. одному и тому же положению твердого тела соответствуют два набора:  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и  $-\lambda_0, -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ .

Для главного момента сил тяготения относительно центра масс  $\mathbf{M}_C$ , используя (1), получаем [10]

$$d\mathbf{M}_C = \int [\boldsymbol{\rho}, d\mathbf{F}] = -\gamma M_1 \int \frac{[\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_1]}{r_1^3} dm - \gamma M_2 \int \frac{[\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}_2]}{r_2^3} dm, \quad (7)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — операция векторного произведения; интегрирование произведем по всему объему тела в системе координат  $C_{xyz}$ .

Используя (3), (6) и пренебрегая в выражении (7) величинами порядка  $\left(\frac{\rho}{R_i}\right)^2$  ( $i = 1, 2$ ) и выше, произведем интегрирование, учитывая, что  $C_x, C_y, C_z$  являются главными центральными осями инерции тела, т. е.

$$\begin{aligned} \int x dm &= \int y dm = \int z dm = 0, \\ \int xy dm &= \int xz dm = \int yz dm = 0, \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_C = \sum_{i=1}^2 \frac{3\gamma M_i}{R_i^5} &((I_z - I_y)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_2)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 + (I_x - I_z)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_3)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 + \\ &+ (I_y - I_x)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_1)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3), \end{aligned} \quad (8)$$

здесь  $I_x, I_y, I_z$  — моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции, а операция скалярного произведения берется в системе координат  $C_{XYZ}$ .

Для проекций  $\mathbf{M}_C$  на оси, жестко связанной с небесным телом системы координат, из (8) находим

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{i=1}^2 \frac{3\gamma M_i}{R_i^5} (I_z - I_y)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_2)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_3), \\ M_y &= \sum_{i=1}^2 \frac{3\gamma M_i}{R_i^5} (I_x - I_z)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_3)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_1), \\ M_z &= \sum_{i=1}^2 \frac{3\gamma M_i}{R_i^5} (I_y - I_x)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_1)(\mathbf{R}_i, \mathbf{e}_2). \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения для главного момента сил тяготения также являются приближенными, в которых отброшены величины порядка  $\left(\frac{\rho}{R_i}\right)^2$  ( $i = 1, 2$ ) и выше.

**Уравнения движения небесного тела.** Полученные выражения для главного вектора (4) и момента внешних сил (8) позволяют определить систему дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения небесного тела.

Уравнения орбитального движения центра масс небесного тела во вращающейся геоцентрической системе координат  $M_{1x_1x_2x_3}$  в рамках хилловского приближения круговой ограниченной задачи трех тел можно представить следующим образом [4]:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + y_1, \\
\dot{x}_2 &= -x_1 + y_2, \\
\dot{x}_3 &= y_3, \\
\dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{R_1^3} + 2x_1 + y_2 + u_1, \\
\dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{R_1^3} - x_2 - y_1 + u_2, \\
\dot{y}_3 &= -\frac{3x_3}{R_1^3} - x_3 + u_3,
\end{aligned} \tag{10}$$

где  $\mathbf{R}_1 = (x_1; x_2; x_3)'$  — вектор координат центра масс тела;  $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)'$  — вектор сопряженных импульсов;  $\mathbf{u}_o = (u_1; u_2; u_3)'$  — вектор управляющих воздействий; центр масс Земли совпадает с началом системы координат; штрихом над вектором здесь и далее будем обозначать операцию транспонирования. Ось  $M_{1x_1}$  направлена вдоль оси, соединяющей центры масс Земли и Солнца. В принятой модели единицы времени и расстояния выбраны таким образом, что единица расстояния равна  $1.5 \cdot 10^6$  км  $\approx 10^{-2}$  а. е., а единица времени — 58.1301 суток (год, деленный на  $2\pi$ ). Точки либрации  $L_1, L_2$  во вращающейся системе неподвижны и имеют координаты  $\mathbf{R}_1^* = (1; 0; 0)'$ ,  $\mathbf{y}^* = (0; 1; 0)'$  и  $\mathbf{R}_1^{**} = (-1; 0; 0)'$ ,  $\mathbf{y}^{**} = (0; -1; 0)'$  соответственно.

Единица скорости равна 298.659 м/с. Поскольку компоненты вектора управления  $\mathbf{u}_o$  представляют собой ускорения, то следует отметить, что единица ускорения равна  $5.94649 \cdot 10^{-5}$  м/с<sup>2</sup>  $\approx 6.06374 \cdot 10^{-6}g$ , где  $g = 9.80665$  м/с<sup>2</sup> — стандартное ускорение свободного падения для Земли.

Неуправляемая система уравнений движения (10) — гамильтоновая, в которой функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\mathbf{y}^2 - \frac{3}{R_1} - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{R_1^2}{2} + x_2y_1 - x_1y_2.$$

Для получения уравнений движения тела относительно центра масс используем динамические уравнения Эйлера [10]. Тогда в безразмерных единицах, принимая, что расстояние  $R$  между Землей и Солнцем равно  $10^2$  единиц расстояния, запишем эти уравнения так:

$$\begin{aligned}
\dot{p} + N_x q r &= N_x \left( \frac{9}{R_1^5} (\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_2)(\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_3) + \frac{3 \cdot 10^6}{R_2^5} (\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_2)(\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_3) \right) + u_p, \\
\dot{q} + N_y r p &= N_y \left( \frac{9}{R_1^5} (\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_3)(\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_1) + \frac{3 \cdot 10^6}{R_2^5} (\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_3)(\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_1) \right) + u_q, \\
\dot{r} + N_z p q &= N_z \left( \frac{9}{R_1^5} (\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_1)(\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_2) + \frac{3 \cdot 10^6}{R_2^5} (\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_1)(\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_2) \right) + u_r,
\end{aligned} \tag{11}$$

здесь  $p, q, r$  — проекции мгновенной угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$  на оси системы координат, жестко связанной с небесным телом,

$$N_x = \frac{I_z - I_y}{I_x}, \quad N_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}, \quad N_z = \frac{I_y - I_x}{I_z},$$

$\mathbf{R}_2 = (x_1 - 10^2; x_2; x_3)'$  — вектор координат центра масс небесного тела относительно

Солнца,  $\mathbf{u}_a = (u_p; u_q; u_r)' = \left( \frac{M_p}{I_x}; \frac{M_q}{I_y}; \frac{M_r}{I_z} \right)'$  — вектор управляющих воздействий, которые выражаются через управляющие моменты  $M_p, M_q, M_r$ .

Единица угловой скорости равна  $1.99106 \cdot 10^{-7}$  рад/с. Компоненты вектора управления  $\mathbf{u}_a$  представляют собой угловые ускорения, тогда следует отметить, что единица углового ускорения равна  $6.30942 \cdot 10^{-15}$  рад/с<sup>2</sup>.

Для проекций вращения твердого тела вокруг орбитальной системы координат на оси системы координат, жестко связанной с небесным телом, рассмотрим кватернионное кинематическое уравнение вращательного движения [11, 12], которое связывает параметры Родрига—Гамильтона и их производные по времени с заданным в системе координат  $C_{xyz}$  вектором относительной угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$ :

$$2\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \circ \boldsymbol{\Omega}_{\lambda},$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 2\dot{\lambda}_0 \\ 2\dot{\lambda}_1 \\ 2\dot{\lambda}_2 \\ 2\dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Здесь  $\circ$  — кватернионное произведение,  $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i} + \lambda_2 \mathbf{j} + \lambda_3 \mathbf{k}$  — кватернион, составленный из параметров Родрига—Гамильтона  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , задающий ориентацию небесного тела в определенный момент времени, где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — линейно независимые символы,  $\boldsymbol{\Omega}_{\lambda}$  — кватернион, соответствующий вектору угловой скорости, заданной в системе координат, жестко связанной с небесным телом.

Система уравнений (10)–(12), учитывая (5) и (6), является замкнутой системой дифференциальных уравнений, описывающих совместное управляемое поступательно-вращательное движение небесного тела в околоземном космическом пространстве.

Заметим, что, если в начальный момент  $x_3 = 0, y_3 = 0$ , поступательному движению будет соответствовать плоское движение центра масс в плоскости эклиптики. В случае, если центр инерции небесного тела имеет фазовые координаты точки либрации, тогда уравнения (10) удовлетворяются тождественно и уравнения управляемого вращательного движения небесного тела относительно центра масс, используя (6), могут быть представлены в виде системы уравнений (12) и

$$\begin{aligned} \dot{p} + N_x q r &= 2\eta N_x (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) (\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) + u_p = \varepsilon_p + u_p, \\ \dot{q} + N_y r p &= \eta N_y (\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) (2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1) + u_q = \varepsilon_q + u_q, \\ \dot{r} + N_z p q &= \eta N_z (2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) - 1) (\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) + u_r = \varepsilon_r + u_r, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\eta = 6 \left( 3 + \frac{1}{0,993} \right)$ ;  $\varepsilon_p, \varepsilon_q, \varepsilon_r$  — проекции углового ускорения на оси подвижной системы координат  $C_{xyz}$ , обусловленные действием гравитационных моментов притягивающих центров.

**З а м е ч а н и е 2.** Если центр масс небесного тела расположен в точке либрации  $L_1$ , то гравитационные моменты, обусловленные влиянием притягивающих центров, выражаются через переменные Родрига—Гамильтона. Этот факт может быть использован в задаче управления.



### Относительное равновесие вращательного движения небесного тела.

Примем, что центр масс небесного тела находится в точке либрации  $L_1$ , тогда существуют такие движения небесного тела — положения относительного равновесия, при которых оно покоится в кенигсовой системе координат  $C_{XYZ}$ , т. е.

$$\lambda_0 = \text{const}, \quad \lambda_1 = \text{const}, \quad \lambda_2 = \text{const}, \quad \lambda_3 = \text{const}.$$

Рассмотрим движение, при котором система координат  $C_{xyz}$ , жестко связанная с небесным телом, и система координат  $C_{XYZ}$  совпадают, т. е. параметрам Родрига—Гамильтона соответствуют значения

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \quad (14)$$

Для того чтобы показать существование решения (14), достаточно заметить, что из уравнений (12) следует равенство

$$p = q = r = 0,$$

тогда для решения (14), учитывая (6) и условие нахождения центра масс тела в точке либрации, гравитационные моменты (10) обращаются в нуль и уравнения неуправляемого вращательного движения (11) удовлетворяются тождественно.

Аналогичным образом можно показать, что в рамках задачи исследования динамики небесного тела в гравитационном поле двух притягивающих центров существует неограниченное множество положений относительного равновесия небесного тела в системе координат  $C_{XYZ}$ :

$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 = 1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad (15)$$

т. е.  $C_x$  совпадает с осью, соединяющей центры масс Земли и Солнца.

Из уравнений неуправляемого вращательного движения (11) следует, что, если гравитационный момент описывается выражением (9), в положении относительного равновесия выполняются соотношения (15), определяющие взаимное расположение центральных осей инерции небесного тела и осей системы координат  $C_{XYZ}$ .

Из (15) вытекает, что для небесного тела, центр инерции которого имеет координаты коллинеарной точки либрации, может иметь место стационарное вращение вокруг оси, проходящей через центры масс Земли и Солнца (случай Эйлера):

$$p = \text{const} \neq 0, \quad q = r = 0. \quad (16)$$

**Плоское движение небесного тела.** Уравнения движения твердого тела в гравитационном поле двух притягивающих центров имеют частные решения, соответствующие плоскому движению тела, когда центр масс небесного тела движется в плоскости эклиптики Земли, относительно которой одна из главных центральных осей инерции тела все время направлена по нормали.

Пусть небесное тело совершает плоское движение и его ось  $C_z$  ортогональна плоскости эклиптики Земли. Тогда для рассматриваемого движения

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_0^2 + \lambda_3^2 = 1. \quad (17)$$

Для движения тела (17) оси  $C_x$ ,  $C_y$  лежат в плоскости эклиптики Земли и их расположение определяется (6) при условии (17):

$$\begin{matrix} & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \begin{matrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2\lambda_0^2 - 1 & -2\lambda_0\lambda_3 & 0 \\ 2\lambda_0\lambda_3 & 2\lambda_0^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (18)$$

Из выражений (9) и (12) при выполнении равенства (17) имеют место соотношения

$$p = 0, \quad q = 0, \quad (19)$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0. \quad (20)$$

Таким образом, учитывая (17), (18), из (19) и (20) можно получить замкнутую систему дифференциальных уравнений плоского управляемого поступательно-вращательного движения небесного тела в околоземном космическом пространстве:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + y_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + y_2, \\ \dot{y}_1 &= -\frac{3x_1}{R_1^3} + 2x_1 + y_2 + u_1, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{3x_2}{R_1^3} - x_2 - y_1 + u_2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{r} &= N_z \left( \frac{9}{R_1^5} (\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_1)(\mathbf{R}_1, \mathbf{e}_2) + \frac{3 \cdot 10^6}{R_2^5} (\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_1)(\mathbf{R}_2, \mathbf{e}_2) \right) + u_r, \\ \begin{pmatrix} 2\dot{\lambda}_0 \\ 2\dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -r \\ r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22)$$

Если центр масс небесного тела на рассматриваемом промежутке времени движения имеет фазовые координаты точки либрации  $L_1$ , тогда неуправляемые уравнения (21) выполняются тождественно и уравнения вращательного движения могут быть переписаны в виде системы уравнений (22) и

$$\dot{r} = -\eta N_z \lambda_0 \lambda_3 (2\lambda_0^2 - 1) + u_r.$$

### **Линеаризованные уравнения поступательно-вращательного движения.**

Для оценки устойчивости положений относительного равновесия (15) в окрестности точки либрации  $L_1$  линеаризуем неуправляемую систему поступательно-вращательного движения (10)–(12). Отсюда систему линеаризованных уравнений можно представить следующим образом:

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad (23)$$

здесь

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$\xi = (x_1 - 1; x_2; x_3; y_1; y_2 - 1; y_3; p; q; r; \lambda_0 - \cos \alpha; \lambda_1 - \sin \alpha; \lambda_2; \lambda_3)',$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A_{12}$  — нулевая матрица размерности  $6 \times 7$ ,

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu N_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu N_z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta N_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\eta N_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nu = 6 - \frac{3 \cdot 10^6}{99^4}, \quad \alpha \in [0, \pi).$$

Матрица  $A$  линеаризованной системы (23) имеет такие собственные значения:

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}, \\ \Lambda_{3,4} &= \pm i \sqrt{2\sqrt{7} - 1}, \\ \Lambda_{5,6} &= \pm 2i, \\ \Lambda_{7,8} &= \pm i \sqrt{\frac{-\eta N_y}{2}} = \pm i \omega_q, \\ \Lambda_{9,10} &= \pm i \sqrt{\frac{\eta N_z}{2}} = \pm i \omega_r, \\ \Lambda_{11,12,13} &= 0, \end{aligned}$$

где  $\Lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ , соответствуют поступательному движению, а  $\Lambda_i$ ,  $i = 7, \dots, 13$ , — вращательному.

С одной стороны из положительного собственного значения  $\Lambda_1 = \sqrt{1 + 2\sqrt{7}}$  следует неустойчивость поступательного движения небесного тела в окрестности точки либрации, с другой — характер вращательного движения тела в частных случаях во многом будет зависеть от распределения массы в теле. Так, для возможного существования малых колебаний относительно положения равновесия необходимо, чтобы  $N_y < 0$ ,  $N_z > 0$ , т. е.

$$I_x < I_y, \quad I_x < I_z,$$

откуда вытекает, что эллипсоид инерции должен быть вытянут вдоль главной оси параллельной прямой, соединяющей центры масс Земли и Солнца.

Заметим также, что для эллипсоида инерции необходимо выполнение неравенств треугольника для его главных центральных осей инерции [12]:

$$I_x \leq I_y + I_z, \quad I_y \leq I_x + I_z, \quad I_z \leq I_x + I_y.$$

**Стабилизация вращательного движения в  $L_1$ .** Пусть управляемое вращательное движение небесного тела описывается динамическими уравнениями (13), которые для задачи стабилизации относительно положения равновесия ( $C_{xyz}$  и  $C_{XYZ}$  совпадают) при совместном рассмотрении с кинематическими уравнениями (12) образуют замкнутую систему управляемого движения небесного тела. Для динамической устойчивости небесного тела необходимым условием является наличие в управлении демпфирующих членов, содержащих проекции мгновенной угловой скорости, при определенной зависимости управления от «кинематической» функции [11].

Для решения задачи стабилизации установим управляющие воздействия  $u_p$ ,  $u_q$ ,  $u_r$  как функции угловых ускорений, которые соответствуют гравитационным моментам притягивающих тел, угловых скоростей и кинематических параметров, определяющих отклонение от положения равновесия:

$$\begin{aligned} u_p &= -\varepsilon_p - \frac{l_1}{I_x} p - \frac{k_1}{I_x} \lambda_0 \lambda_1, \\ u_q &= -\varepsilon_q - \frac{l_2}{I_y} q - \frac{k_2}{I_y} \lambda_0 \lambda_2, \\ u_r &= -\varepsilon_r - \frac{l_3}{I_z} r - \frac{k_3}{I_z} \lambda_0 \lambda_3. \end{aligned} \tag{24}$$

Величины  $\lambda_0 \lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в (24) могут выступать мерой углового отклонения системы координат  $C_{xyz}$  от системы  $C_{XYZ}$ , поскольку при малых отклонениях они приближенно равны углам Крылова [11]. Например, пусть  $C_Z$  направлена по местной вертикали, а ось  $C_X$  — по курсу, тогда, если обозначить  $\theta$  — угол тангажа, от которого зависит вращение тела вокруг оси  $C_Y$  в положительном направлении — против хода часовой стрелки (получаем систему координат  $C_{X'Y'Z'}$ ),  $\varphi$  — угол рыскания, обуславливающий вращение вокруг оси  $C_{Z'}$  в положительном направлении (получаем систему координат  $C_{X''Y''Z''}$ ),  $\psi$  — угол крена, задающий вращение вокруг оси  $C_{X''}$  в положительном направлении (получаем систему координат, жестко связанную с небесным телом, —  $C_{xyz}$ ), тогда при малых отклонениях системы  $C_{xyz}$  от системы  $C_{XYZ}$  будут иметь место приближенные равенства

$$\begin{aligned} \psi &\approx 2\lambda_0 \lambda_1, \\ \theta &\approx 2\lambda_0 \lambda_2, \\ \varphi &\approx 2\lambda_0 \lambda_3. \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости управляемой системы (13) с управлением (24) определим, следуя [11], функцию Ляпунова в виде

$$V = T + W,$$

где  $T = \frac{1}{2}(I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2)$  — кинетическая энергия небесного тела;  $W = k(1 - \lambda_0^2) = \frac{k}{2}((1 - \lambda_0^2) + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$  — «кинематическая» функция;  $k$  — положительный коэффициент.

Функция  $V$  является положительно определенной и равна нулю в положении относительного равновесия (14), т. е. когда системы координат  $C_{xyz}$  и  $C_{XYZ}$  совпадают.

Полная производная по времени от функции  $V$ , в силу уравнений движения (12), (13), равна

$$\dot{V} = I_x p(\varepsilon_p + u_p) + I_y q(\varepsilon_q + u_q) + I_z r(\varepsilon_r + u_r) + k(p\lambda_0\lambda_1 + q\lambda_0\lambda_2 + r\lambda_0\lambda_3). \quad (25)$$

Подставляя компоненты управляющего воздействия (24) в выражение (25), получаем

$$\dot{V} = -l_1 p^2 - l_2 q^2 - l_3 r^2 - p\lambda_0\lambda_1(k_1 - k) - q\lambda_0\lambda_2(k_2 - k) - r\lambda_0\lambda_3(k_3 - k). \quad (26)$$

В выражении (26) можно положить  $k_i = k$  ( $i = 1, 2, 3$ ), тогда при  $l_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) полная производная по времени функции Ляпунова  $\dot{V}$  — отрицательно определенная, которая обращается в нуль только в положении равновесия (14).

**З а м е ч а н и е 3.** Управление (24) обеспечивает процесс стабилизации во всей области положений небесного тела, за исключением быть может только  $\lambda_0 := 0$ .

Для решения задачи стабилизации относительно стационарного вращения (16) с величиной угловой скорости, равной  $p = p_{ref}$ , найдем управляющие воздействия  $u_p$ ,  $u_q$ ,  $u_r$  как функции угловых ускорений, которые соответствуют гравитационным моментам притягивающих тел, угловых скоростей и кинематических параметров (направляющих косинусов), определяющих отклонение от положения стационарного вращения:

$$\begin{aligned} u_p &= -\varepsilon_p - \frac{l_1}{I_x}(p - p_{ref}), \\ u_q &= -\varepsilon_q - \frac{l_2}{I_y}q - \frac{k_2}{I_y}(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3), \\ u_r &= -\varepsilon_r - \frac{l_3}{I_z}r - \frac{k_3}{I_z}(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Для исследования устойчивости управляемой системы (13) с управлением (27) получим функцию Ляпунова

$$V = T + W,$$

где  $T = \frac{1}{2}(I_x p^2 + I_y q^2 + I_z r^2)$  — кинетическая энергия тела;  $W = k(1 - (\lambda_0^2 + \lambda_1^2)) = \frac{k}{2}((1 - (\lambda_0^2 + \lambda_1^2)) + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$  — «кинематическая» функция;  $k$  — положительный коэффициент. Функция  $V$  — положительно определенная и равна нулю в положениях относительного равновесия (15).

Полная производная по времени от функции  $V$ , в силу уравнений движения (12), (13), при учете (27) будет равна

$$\dot{V} = -l_1 p(p - p_{ref}) - l_2 q^2 - l_3 r^2 - q(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3)(k_2 - k) - r(\lambda_0\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2)(k_3 - k). \quad (28)$$

В выражении (28) в простейшем случае можно положить  $k_i = k$  ( $i = 2, 3$ ), тогда при  $l_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) полная производная по времени функции Ляпунова  $\dot{V}$  является отрицательно определенной функцией при  $|p| > |p_{ref}|$ , а при  $|p| < |p_{ref}|$  — поло-

жительно определенной, т. е. в первом случае происходит уменьшение кинетической энергии тела до величины  $T_{ref} = \frac{1}{2}I_x p_{ref}^2$ , во втором — ее увеличение до  $T_{ref}$ .

**З а м е ч а н и е 4.** Управление (27) может обеспечить стабилизацию вращательного движения относительно положения равновесия, удовлетворяющего условию (15), когда  $p_{ref} := 0$ .

Таким образом, получаем, что в точке либрации  $L_1$  управляющее воздействие вида (24) может стабилизировать вращательное движение небесного тела относительно центра масс в кениговой системе координат, а управляющее воздействие (27) может обеспечить решение задачи стабилизации относительно стационарного вращения с наперед заданной величиной угловой скорости  $p_{ref}$ .

Далее, используя численное моделирование, оценим управляющие воздействия (24), (27), необходимые для реализации задач стабилизации небесного тела в окрестности  $L_1$ .

**Численное моделирование движения.** Проведем компьютерное моделирование движения небесного тела в окрестности положения равновесия, соответствующего коллинеарной точке либрации  $L_1$  при условии, что центр масс тела имеет фазовые координаты  $L_1$ . Для моделирования движения и расчета возможных управляющих воздействий на небесное тело используем параметры тела ( $m = 1.4 \cdot 10^6$  кг, средний диаметр тела  $d = 10$  м,  $I_x = 7.91 \cdot 10^6$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_y = 1.918 \cdot 10^7$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_z = 2.023 \cdot 10^7$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega_q = 2.78694$ ,  $\omega_r = 2.59543$ ) и соответствующие исходные данные для каждого из примеров стабилизации. Отметим, что вопрос размещения такого объекта в окрестности точки либрации в данной работе не исследуется, формулировка идеи и возможный алгоритм решения такой задачи представлены в [13].

Результаты численного моделирования управляемого движения небесного тела с начальными данными и управляющими воздействиями (24) ( $p = 10^2$ ,  $q = 10^3$ ,  $r = 5 \cdot 10^2$ ,  $\lambda_0 = \sqrt{0.5}$ ,  $\lambda_1 = \sqrt{0.2}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{0.1}$ ,  $\lambda_3 = \sqrt{0.2}$ ,  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) =  $10^{-10}$ ,  $k_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) =  $5 \cdot 10^{-8}$ ) на промежутке времени  $\pi/2$  единиц приведены на рис. 3–6. На рис. 3, 4 представлены значения проекций угловой скорости небесного тела на оси подвижной системы координат и параметров Родрига–Гамильтона соответственно, на рис. 5 — проекций углового ускорения, обусловленного действием результирующего гравитационного момента ( $a$ ), и компонент управляющего воздействия ( $b$ ) на оси подвижной системы координат. На рис. 6 показано взаимное расположение систем координат  $C_{xyz}$  и  $C_{XYZ}$  в начальный ( $a$ ) и конечный моменты времени ( $b$ ).

Результаты численного моделирования движения небесного тела с начальными данными и компонентами управляющего воздействия (27) ( $p = 50$ ,  $q = 0$ ,  $r = 10$ ,  $\lambda_0 = \sqrt{0.1}$ ,  $\lambda_1 = \sqrt{0.1}$ ,  $\lambda_2 = \sqrt{0.2}$ ,  $\lambda_3 = \sqrt{0.6}$ ,  $l_1 = 10^{-11}$ ,  $p_{ref} = 500$ ,  $l_i$  ( $i = 2, 3$ ) =  $10^{-8}$ ,  $k_i$  ( $i = 2, 3$ ) =  $10^{-7}$ ) на промежутке времени  $\pi/2$  единиц приведены на рис. 7–10, которые аналогичны рис. 3–6. Это движение отвечает стабилизации движения небесного тела в окрестности стационарного вращения.

Таким образом, из результатов компьютерного моделирования вращательного движения небесного тела в точке либрации  $L_1$  следует, что управляющие воздействия имеют порядок  $10^{-10}$  рад/с<sup>2</sup>, что при учете масс-инерционных характеристик тела соответствует величине момента порядка  $10^{-4}$  Н·м. Также следует заметить, что на значения управляющих воздействий зависят не только от начальных данных и масс-инерционных характеристик небесного тела, что, вообще говоря, следует из уравнений вращательного движения, но и от промежутка времени, отведенного для обеспечения стабилизации.

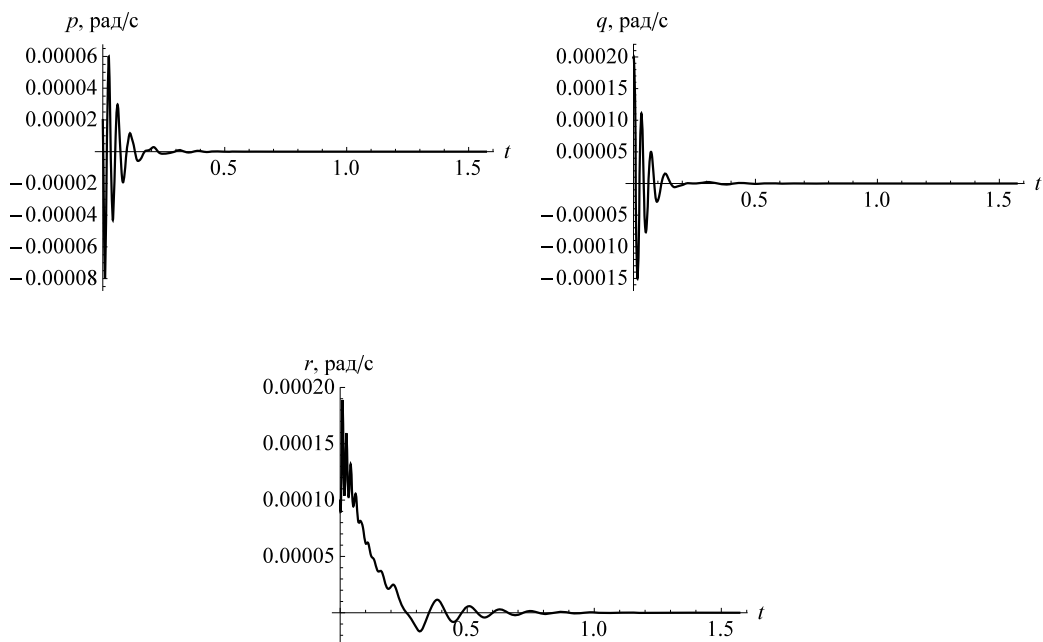


Рис. 3. Значения проекций угловой скорости небесного тела

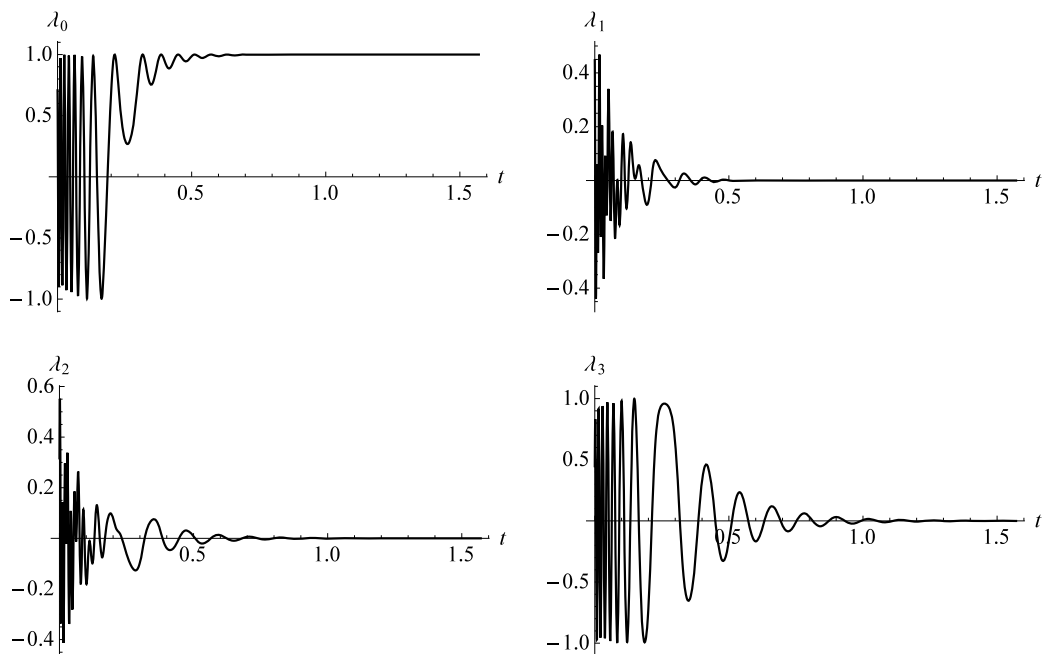


Рис. 4. Значения параметров Родрига—Гамильтона

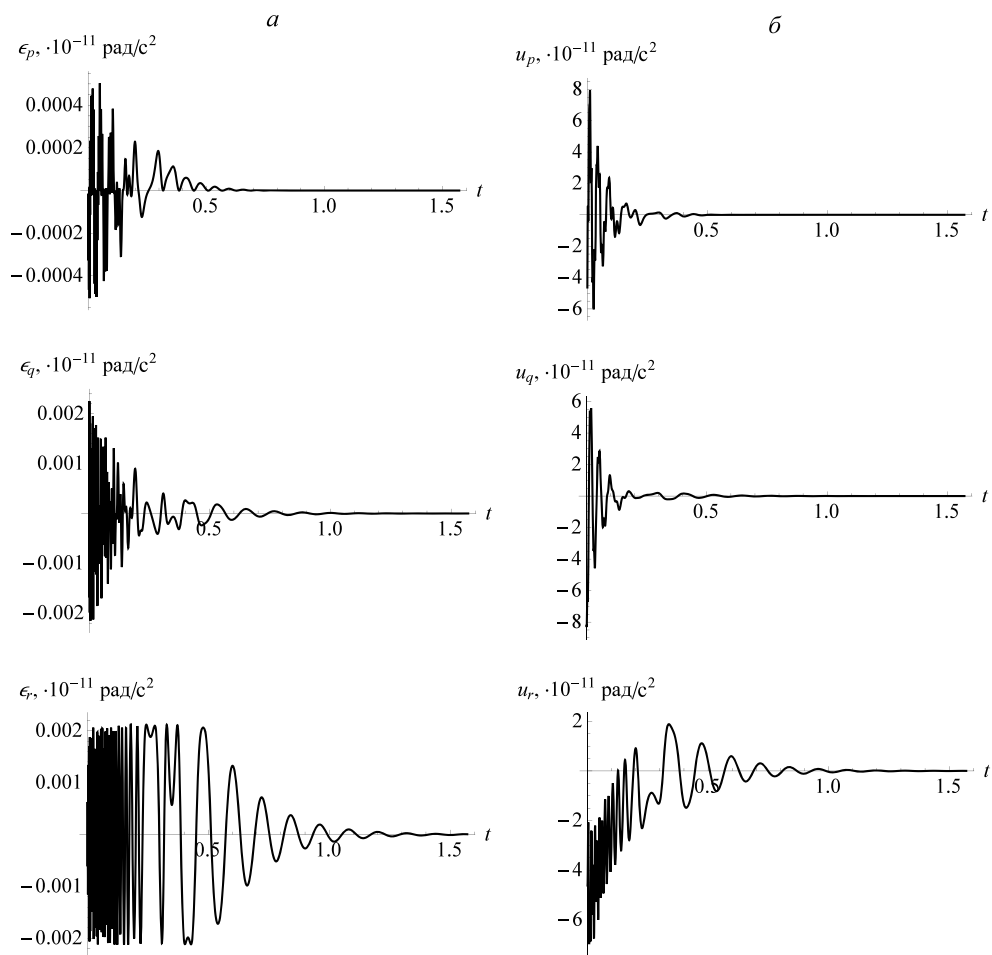


Рис. 5. Значения проекций углового ускорения (а) и управляющего воздействия (б)

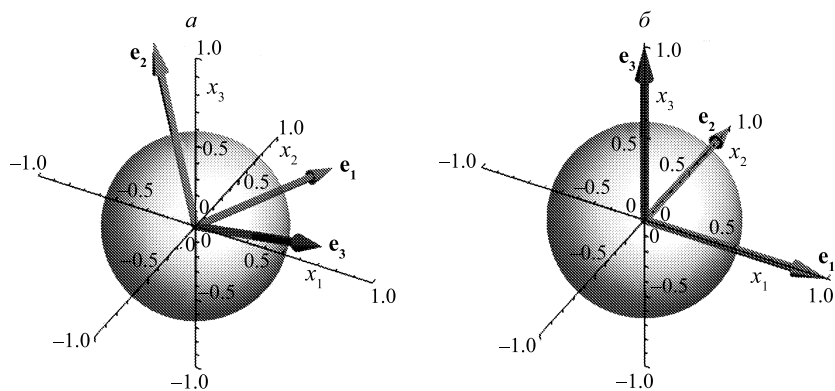


Рис. 6. Положения небесного тела в  $L_1$

Объяснение в тексте.



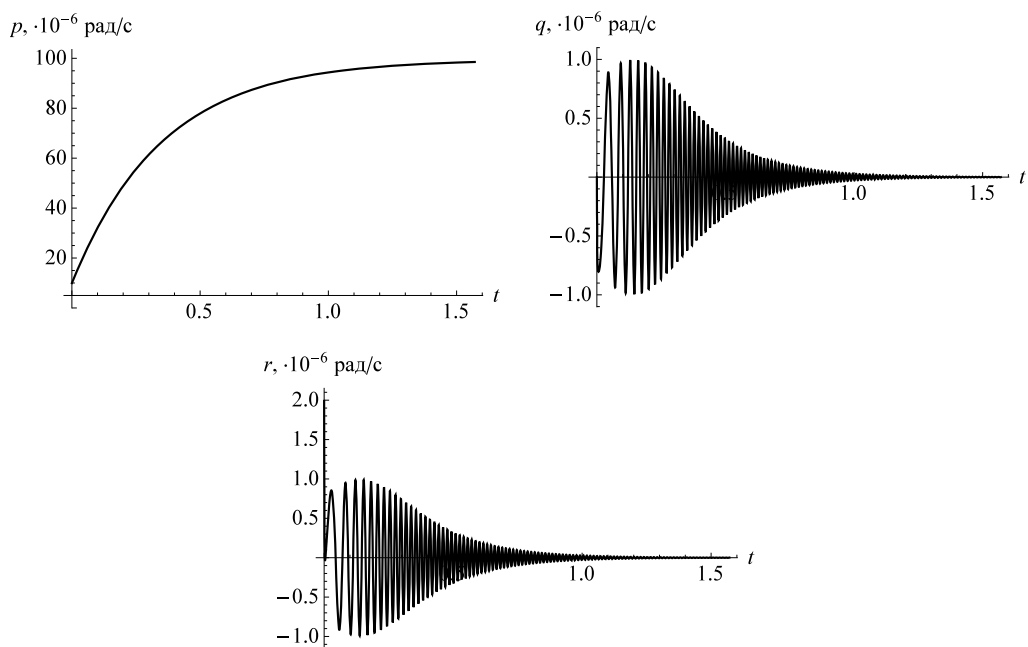


Рис. 7. Значения проекций угловой скорости небесного тела

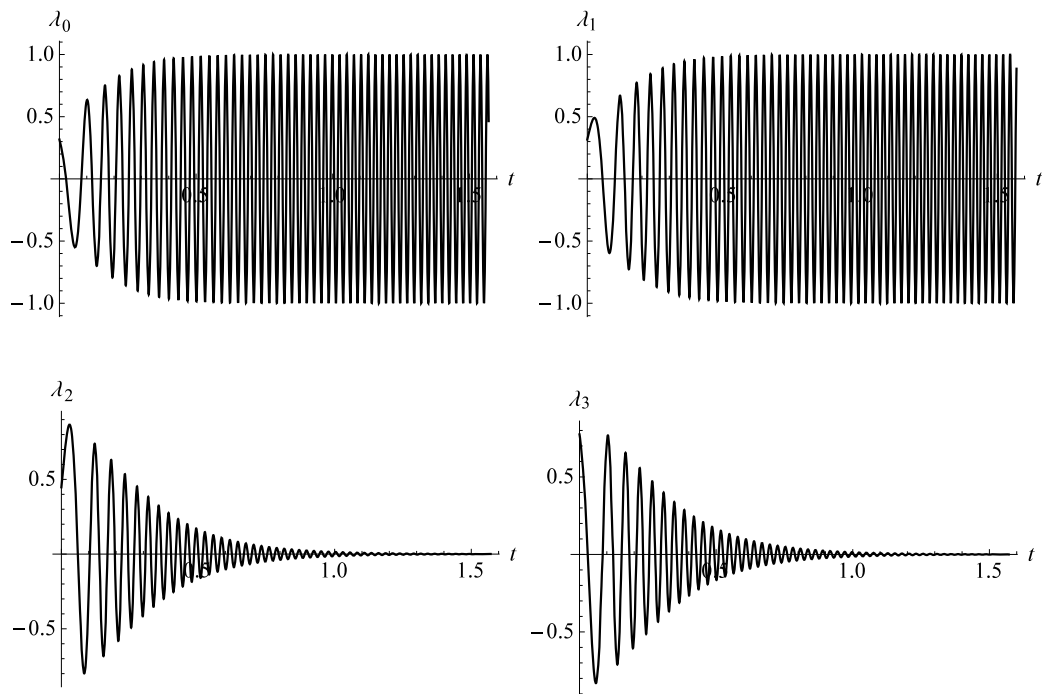


Рис. 8. Значения параметров Родрига—Гамильтона

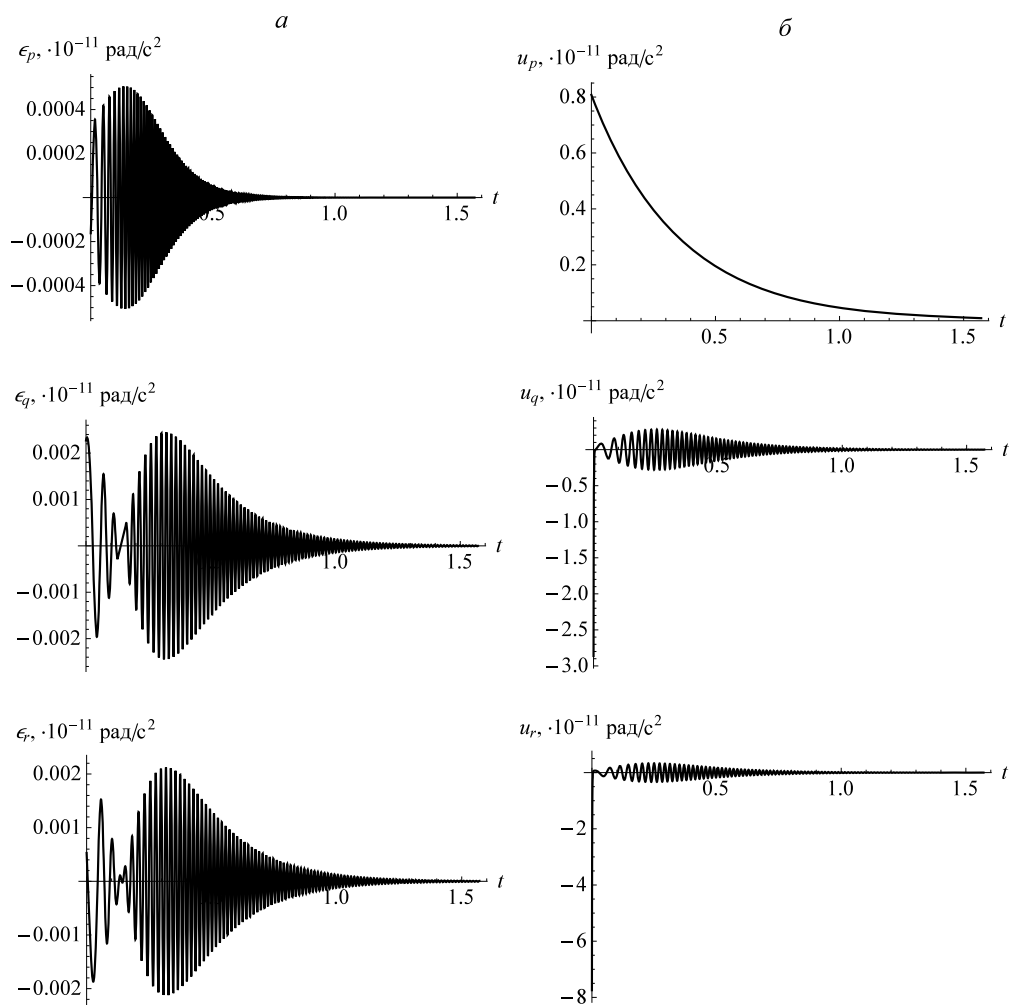


Рис. 9. Значения проекций углового ускорения (а) и управляющего воздействия (б)

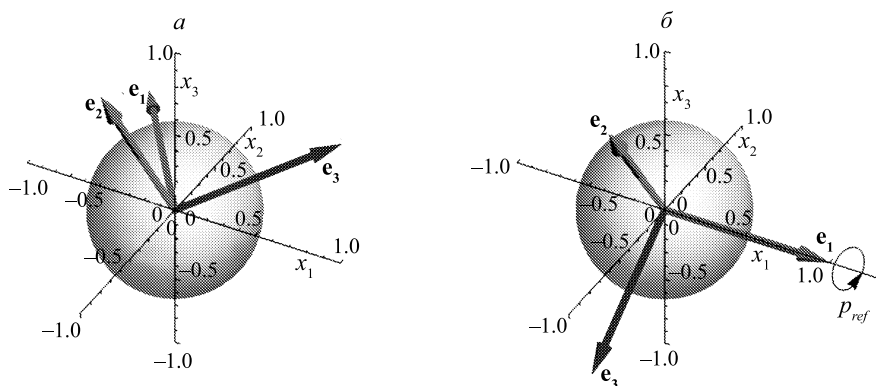


Рис. 10. Положения небесного тела в  $L_1$

**Заключение.** Получены уравнения управляемого поступательно-вращательного движения небесного тела в гравитационном поле круговой ограниченной задачи трех тел. Для линеаризованной системы уравнений неуправляемого движения найдены собственные значения вращательного движения и, следовательно, частоты малых колебаний небесного тела около положений относительного равновесия, для существования которых, как было установлено, большая ось эллипсоида инерции параллельна оси, соединяющей центры масс Земли и Солнца. Отметим, что все собственные значения линеаризованной системы поступательно-вращательного движения  $\Lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 13$ ) имеют один порядок. Также решены задачи стабилизации небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации с целью построения законов управления вращательным движением относительно центра масс, обоснованы предложенные законы управления, проведено исследование устойчивости управляемого вращательного движения в точке либрации  $L_1$ , осуществлено компьютерное моделирование.

Полученные уравнения движения могут быть применены для изучения движения естественных и искусственных небесных тел, например, если в начальный момент времени космический аппарат находится в окрестности положения относительного равновесия вблизи фазового пространства коллинеарной точки либрации, а затем совершает маневр, обеспечивающий мониторинг околоземного космического пространства, тогда для выхода из окрестности точки либрации можно использовать малое управляющее воздействие [6, 7] — малую тягу, которая может быть обусловлена необходимой ориентацией космического аппарата относительно набегающего потока солнечного ветра. Такое воздействие становится эффективным в силу неустойчивости коллинеарной точки либрации. Именно в этом случае неустойчивость поступательного движения является положительным фактором, позволяющим при небольших энергетических затратах существенно изменить положение небесного тела в пространстве конфигураций.

Результаты проведенного исследования расширяют возможности управляемого маневрирования в околоземном космическом пространстве и могут быть полезны для решения проблемы астероидной опасности, где имеет место идея ударного воздействия на потенциально опасный объект с целью изменения траектории и предотвращения его дальнейшего столкновения с Землей [14]. Из данных компьютерного моделирования следует, что для ударного воздействия можно использовать, например, астероид массы порядка тысячи тонн, который в начальный момент времени предлагается удерживать, ввиду малых значений гравитационных сил [4, 5] и моментов, в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$ .

## Литература

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975. 308 с.
3. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
4. Шмыров В. А. Стабилизация управляемого орбитального движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$  // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2005. Вып. 2. С. 193–199.
5. Шиманчук Д. В. Моделирование орбитального управляемого движения космического аппарата в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1$  // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2010. Вып. 3. С. 86–92.
6. Shmyrov A., Shymanchuk D. Maneuvering in near-Earth space with the use of the collinear libration points // Intern. conference on Mechanics – Seventh Polyakhov's Reading. 2015. Art. N 7106777. P. 1–5.

7. Shmyrov A., Shymanchuk D., Sokolov L. The interception problem of a celestial body with the use of the collinear libration points // Intern. conference on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP): Proceedings. Saint Petersburg; IEEE, 2015. Art. N 7342068. P. 129–131.

8. Kane T. R., Marsh E. L. Attitude stability of a symmetric satellite at the equilibrium points in the restricted three-body problem // Celestial Mechanics. 1971. Vol. 4. P. 78–90.

9. Guzzetti D., Howell K. C. Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits // Acta Astronautica. 2017. Vol. 130. P. 97–113.

10. Маркеев А. П. Теоретическая механика: учеб. пособие для университетов. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 416 с.

11. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

12. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела: препринты Ин-та прикл. математики им. М. В. Келдыша. 2013. № 39. 23 с. // URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> (дата обращения: 27.09.2016).

13. Шиманчук Д. В., Шмыров А. С. Построение траектории возвращения в окрестность коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2013. Вып. 2. С. 76–85.

14. Артемьева Н. А., Баканас Е. С., Барабанов С. И., Витязев А. В., Волков В. А., Глазачев Д. О., Дегтярь В. Г., Емельяненко В. В., Иванов Б. А., Кочетова О. М., Куликова Н. В., Медведев Ю. Д., Нароенков С. А., Немчинов И. В., Печерникова Г. В., Польш В. Г., Попова О. П., Рыхлова Л. В., Светцов В. В., Симонов А. В., Соколов Л. Л., Тиммербаев Р. М., Чернетенко Ю. А., Шор В. А., Шувалов В. В., Шустов Б. М. Астероидно-кометная опасность: вчера, сегодня, завтра / под ред. Б. М. Шустова, Л. В. Рыхловой. М.: Физматлит, 2013. 384 с.

**Для цитирования:** Шиманчук Д. В. Моделирование управляемого поступательно-вращательного движения небесного тела в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_1^*$  // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2017. Т. 13. Вып. 2. С. 147–167. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.203

## References

1. Beletsky V. V. *Dvizheniye iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* [Motion of the satellite around its center of mass]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 416 p. (In Russian)

2. Beletsky V. V. *Dvizheniye sputnika otnositel'no tsentra mass v gravitatsionnom pole* [Motion of the satellite around its center of mass in a gravitational field]. Moscow, Moscow State University Publ., 1975, 308 p. (In Russian)

3. Markeev A. P. *Tochki libracii v nebesnoi mehanike i kosmodinamike* [Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 312 p. (In Russian)

4. Shmyrov V. A. Stabilizatsiya upravlyаемого orbital'nogo dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnej tochki libracii  $L_1$  [Stabilization of the orbital motion of the spacecraft in the neighborhood of the collinear libration points  $L_1$ ]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2005, iss. 2, pp. 193–199. (In Russian)

5. Shymanchuk D. V. Modelirovanie orbital'nogo upravlyаемого dvizheniya kosmicheskogo apparata v okrestnosti kollinearnej tochki libracii  $L_1$  [Modelling orbital controlled motion of a spacecraft in the neighborhood of the collinear libration point  $L_1$ ]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2009, iss. 3, pp. 86–92. (In Russian)

6. Shmyrov A., Shymanchuk D. Maneuvering in near-Earth space with the use of the collinear libration points. *Intern. conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading*, 2015, art. no. 7106777, pp. 1–5.

7. Shmyrov A., Shymanchuk D., Sokolov L. The interception problem of a celestial body with the use of the collinear libration points. *Intern. conference on “Stability and Control Processes” in memory of V. I. Zubov (SCP): Proceedings*. Saint Petersburg, IEEE, 2015, art. no. 7342068, pp. 129–131.

8. Kane T. R., Marsh E. L. Attitude stability of a symmetric satellite at the equilibrium points in the restricted three-body problem. *Celestial Mechanics*, 1971, vol. 4, pp. 78–90.

9. Guzzetti D., Howell K. C. Natural periodic orbit-attitude behaviors for rigid bodies in three-body periodic orbits. *Acta Astronautica*, 2017, vol. 130, pp. 97–113.

10. Markeev A. P. *Teoreticheskaya mekhanika* [Theoretical Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 416 p. (In Russian)

11. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Primeneniye kvaternionov v zadachakh oriyentatsii tverdogo tela* [The use of quaternions in problems of the rigid body orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 320 p. (In Russian)

12. Golubev Y. F. Algebra kvaternionov v kinematike tverdogo tela [Quaternion algebra in rigid

body kinematics]. *Preprints of Keldysh Institute of applied mathematics*, 2013, no. 39, 23 p. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-39> (accessed: 27.09.2016).

13. Shymanchuk D. V., Shmyrov A. S. Postroenie traektorii vozvrashheniya v okrestnost' kollinearnej tochki libracii sistemy Solnce—Zemlja [Construction of the trajectory of the return in the neighborhood of the collinear libration point of the Sun—Earth system]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 10. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2013, iss. 2, pp. 76–85. (In Russian)

14. Artemieva N. A., Bakanas E. S., Barabanov S. I., Vityazev A. V., Volkov V. A., Glazachev D. O., Degtyar' V. G., Yemel'yanenko V. V., Ivanov B. A., Kochetova O. M., Kulikova N. V., Medvedev Y. D., Naroyenkov S. A., Nemchinov I. V., Pechernikova G. V., Pol' V. G., Popova O. P., Rykhlova L. V., Svetstov V. V., Simonov A. V., Sokolov L. L., Timerbayev R. M., Chernetenko Y. A., Shor V. A., Shuvalov V. V., Shustov B. M. *Asteroidno-kometnaya opasnost': vchera, segodnya, zavtra* [Asteroid-comet hazard: yesterday, today and tomorrow]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2013, 384 p. (In Russian)

**For citation:** Shymanchuk D. V. Modeling of controlled coupled attitude-orbit motion in the neighborhood of collinear libration point  $L_1$ . *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2017, vol. 13, iss. 2, pp. 147–167. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2017.203

Статья рекомендована к печати проф. Л. А. Петросяном.

Статья поступила в редакцию 7 марта 2017 г.

Статья принята к печати 11 апреля 2017 г.